С.К. Соболев

Лекции по дифференциальным уравнениям

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

1. Общие теоремы.

Определение 1. ***Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) второго порядка*** называется дифференциальное уравнение вида:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (1)$$

где $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ и $f(x)$ – некоторые функции.

Пример: $x \cdot y'' - e^{2x} \cdot y' + y \cdot \sin x = \operatorname{arctg} x$.

Если $f(x) \equiv 0$, то ЛДУ (1) называется ***однородным***, в противном случае оно называется ***неоднородным***.

Однородное линейное дифференциальное уравнение (ОЛДУ) имеет вид

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

Оно является ***соответствующим*** для ЛДУ (1).

Теорема 2. (о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка). *Пусть на интервале* $(\alpha;\beta)$ *функции* $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ *и* $f(x)$ *непрерывны,* $a_0(x) \neq 0$ *и* $x_0 \in (\alpha;\beta)$. *Тогда для любых постоянных* $y_0, y_1 \in \mathbf{R}$ *задача Коши для ЛДУ (1) с начальными условиями* $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$ *имеет на всем интервале* $(\alpha;\beta)$ *решение, притом единственное.*

Определение 3. Операторная запись ЛДУ

Для дифференциального уравнения (1) рассмотрим ***дифференциальный оператор***

$$\mathcal{L} \underset{def}{=} a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)\mathcal{E}, \qquad (3)$$

где $\mathcal{E}$ – ***тождественный*** оператор, т.е. такой, что $\mathcal{E}[y(x)] = y(x)$ для любой функции $y(x)$, $\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования, $\frac{d^2}{dx^2}$ – оператор двукратного дифференцирования. Тогда $\mathcal{L}[y]$ есть результат применения оператора $\mathcal{L}$ к функции $y(x)$, т.е. левая часть ЛДУ (1) , которое символически можно записать так:

$$\mathcal{L}[y] = f(x), \qquad (1')$$

Соответствующее однородное ЛДУ (2) можно символически записать в операторном виде так:

$$\mathcal{L}[y] = 0 \qquad (2')$$

Пример 4. Для дифференциального равнения

$$x^2y'' - 5xy' + 3y = x^4 \Leftrightarrow \mathcal{L}[y] = x^4 \qquad (4)$$

$a_0(x) = x^2$, $a_1(x) = -5x$, $a_2(x) = 3$, и $y = x^5$, тогда

$$\mathcal{L}[y] = x^2\left(x^5\right)'' - 3x\left(x^5\right)' + 2x^5 = x^2 \cdot 20x^3 - 3x \cdot 5x^4 + 2x^5 = 7x^5,$$

это показывает, что функция $y = x^5$ **не** является решением уравнения (4).

Упражнение 5. Подобрать числа A и n так, чтобы функция $y = Ax^n$ была решением линейного дифференциального уравнения (4).

Ответ: $y = -\frac{1}{5}x^4$.

Теорема 6. *Дифференциальный оператор* $\mathcal{L}$ *– линейный.*

Доказательство. Нам надо доказать, что для любых функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, дважды дифференцируемых на интервале $(\alpha;\beta)$, и произвольных постоянных λ_1 и λ_2 справедливо

$$\mathcal{L}[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)] = \lambda_1 \mathcal{L}[y_1(x)] + \lambda_2 \mathcal{L}[y_2(x)].$$

В самом деле,

$$\mathcal{L}[\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2] = a_0(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a_1(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + +a_2(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$
$$= a_0(x)(\lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'') + a_1(x)(\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2') + +a_2(x)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$
$$= \lambda_1 [a_0(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2 y_1] + \lambda_2 [a_0(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2 y_2] =$$
$$= \lambda_1 \mathcal{L}[y_1] + +\lambda_2 \mathcal{L}[y_2].$$

что и требовалось доказать.■

Теорема 7. *Множество S_0 всех частных решений ОЛДУ (2) образует линейное пространство. Это значит, что любая линейная комбинация частных решения ОЛДУ также является частным решением ОЛДУ.*

Доказательство. Пусть S_0 есть множество всех частных решений однородного линейного ДУ

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0. \qquad (2)$$

Тогда S_0 состоит из всех дважды дифференцируемых функций $y(x)$ таких, что $\mathcal{L}[y(x)] = 0$, где $\mathcal{L}$ –соответствующий дифференциальный оператор.

Пусть теперь $y_1(x) \in S_0$ и $y_2 \in S_0$. Это значит, что $\mathcal{L}[y_1(x)] = 0$ и $\mathcal{L}[y_2(x)] = 0$. Пусть теперь $z(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$. Тогда $\mathcal{L}[z(x)] = \mathcal{L}[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)] =$

{в силу линейности оператора $\mathcal{L}$}

$$= \lambda_1 \mathcal{L}[y_1(x)] + \lambda_2 \mathcal{L}[y_2(x)] = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0.$$

Но это и значит что $z(x) \in S_0$. ■

Определение 8. ***Вронскианом***, или ***определителем Вронского*** совокупности из n функций $y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)$ называется функциональный определитель

$$W_{[y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)]} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

В частности, вронскиан пары функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ –это:

$$W[y_1,\ y_2] \underset{def}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Пример 9. (а) Вронскиан пары функций $y_1 = x^3,\ y_2 = e^{2x}$, равен

$$W[x^3, e^{2x}] = \begin{vmatrix} x^3 & e^{2x} \\ (x^3)' & (e^{2x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & e^{2x} \\ 3x^2 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2x^3 e^{2x} - 3x^2 e^{2x} = x^2(2x-3)e^{2x}.$$

(б) вронскиан тройки функций $y_1 = x,\ y_2 = \sin 2x,\ y_3 = e^{3x}$ равен

$$W[x, \sin 2x, e^{3x}] = \begin{vmatrix} x & \sin 2x & e^{3x} \\ 1 & 2\cos 2x & 3e^{3x} \\ 0 & -4\sin 2x & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} x & \sin 2x & 1 \\ 1 & 2\cos 2x & 3 \\ 0 & -4\sin 2x & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}\left(18x\cos 2x - 13\sin 2x + 12x\sin 2x\right).$$

Упражнение 10. Найти вронскиан тройки функций e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}

Ответ: $(a-b)(b-c)(c-a) \cdot e^{(a+b+c)x}$

Определение 11.. Совокупность функций $y_1(x), ...,\ y_n(x)$ называется ***линейно зависимой на интервале*** $(\alpha; \beta)$, если найдутся постоянные $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$ (не равные одновременно нулю) такие, что $\lambda_1 y_1(x)+...+\lambda_n y_n(x)=0$ для всех $x\in(\alpha;\beta)$. В противном случае, т.е. когда равенство $\lambda_1 y_1(x)+...+\lambda_n y_n(x)=0$ для всех $x\in(\alpha;\beta)$ выполняется только когда $\lambda_1=...=\lambda_n=0$, функции $y_1(x),...,\ y_n(x)$ называются **линейно независимыми.**

Например, функции $y_1(x)=\sin x,\ y_2(x)=\sin 3x,\ y_3(x)=\sin^3 x$ линейно зависимы на $\mathbf{R}$, поскольку, согласно оной из формул тригонометрии, $\sin 3x\equiv 3\sin x-4\sin^3 x$, откуда $3y_1(x)-y_2(x)-4y_3(x)\equiv 0$ на $\mathbf{R}$.

Замечание 12. Две ненулевые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(\alpha;\beta)$ тогда и только тогда, когда они на этом интервале пропорциональны, т.е. когда $y_2(x)\equiv\lambda\cdot y_1(x)$ на $(\alpha;\beta)$, что, в свою очередь означает, что отношение тих функций есть величина постоянная. Например, функции $y_1=\sin x$ и $y_2=\cos x$ линейно независимы на любом интервале, т.к. их отношение $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=\operatorname{tg} x$ непостоянно.

Теорема 13. (о вронскиане линейно зависимых функций). *Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(\alpha;\beta)$, то их вронскиан равен нулю в каждой точке этого интервала.*

Доказательство. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(\alpha;\beta)$, то они на этом интервале пропорциональны, т.е. найдется $\lambda=const$ такое что $y_2(x)=\lambda\cdot y_1(x)$. Тогда их вронскиан

$$W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1(x) & \lambda\cdot y_1(x)\\ y_1'(x) & \lambda\cdot y_1'(x)\end{vmatrix}\equiv 0 \text{ на } (\alpha;\beta).$$

Следствие 14. *Если вронскиан пары функций отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала $(\alpha;\beta)$, то эти функции линейно независимы на этом интервале.*

Доказательство Пусть уже доказана основная теорема, которая имеет вид $A\Rightarrow B$. Тогда следствием будет теорема, логически ей эквивалентная: (не B) $\Rightarrow$ (не A), которое доказывается от противного. В самом деле, пусть (не-*B*) верно, а (не-*A*) – ложно. Это значит, что *B* ложно, а <u>*A*</u> – истинно. Но тогда из основанной теоремы вытекает, что должно быть верно и *B*. Противоречие.

Теорема 15. (свойство частных решений ОЛДУ, вронскиан которых равен нулю в некоторой точке)**.** *Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями ОЛДУ второго порядка (2) с непрерывными на $(\alpha;\beta)$ коэффициентами $a_i(x)$ ($i=0,1,2$), причем $a_0(x)\neq 0$, и вронскиан этих функций $W(x)=W[y_1(x),\ y_2(x)]$ обращается в нуль в какой-то точке x_0 интервала $(\alpha;\beta)$, то функции $y_1(x),y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(\alpha;\beta)$.*

Доказательство. Вронскиан пары функций $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ равен

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x).$$

По условию, $W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0)\\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix}=0$. Из теории матриц отсюда следует, что столбцы этого определителя линейно зависимы, т.е. найдутся такие $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$ (не равные одновременно нулю) такие, что

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix} y_1(x_0)\\ y_1'(x_0)\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix} y_2(x_0)\\ y_2'(x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1\cdot y_1(x_0)+\lambda_2\cdot y_2(x_0)=0\\ \lambda_1\cdot y_1'(x_0)+\lambda_2\cdot y_2'(x_0)=0\end{cases}. \qquad (5)$$

Рассмотрим функцию $z(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$, которая, согласно **теореме 5**, также является частным решением ОЛДУ (2). Тогда $z'(x) = \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x)$. Вычислим значения: $z(x_0) = \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) = 0, \quad z'(x_0) = \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0)$.

Рассмотрим задачу Коши для ОЛДУ (2) с начальными условиями $y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0$.

Решением этой задачи Коши, очевидно, является тождественно нулевая функция $t(x) \equiv 0$.

Кроме того, решением этой же задачи Коши является, как мы только что показали, и функция $z(x)$. Но, по теореме 2, решение задачи Коши для ЛДУ (с любыми начальными условиями) единственно на всем промежутке $(\alpha; \beta)$. Поэтому $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = z(x) = t(x) \equiv 0$ на всем интервале $(\alpha; \beta)$. А это и значит, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы. ■

Теперь сформулируем следствие из предыдущей теоремы.

Следствие 16 (свойство вронскиана линейно независимых частных решений ОЛДУ)**.** *Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на интервале $(\alpha; \beta)$ и являются частными решениями ОЛДУ второго порядка (2) с непрерывными на $(\alpha; \beta)$ коэффициентами $a_i(x)$, причем $a_0(x) \neq 0$, то вронскиан этих функций отличен от нуля во всех точках этого интервала.*

Доказательство – от противного по вышеприведенной схеме.

Теорема 17. (о размерности пространства решений ОЛДУ) *Если на промежутке $(\alpha; \beta)$ все коэффициенты $a_i(x)$ ($i = 0, 1, ..., n$) непрерывны и $a_0(x) \neq 0$, то размерность пространства S_0 всех решений ОЛДУ n-го порядка*

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \qquad (6)$$

на этом промежутке равна порядку этого дифференциального уравнения, $\dim S_0 = n$.

В частности, размерность пространства решений ОЛДУ второго порядка (2) равна 2.

Доказательство приведем для $n = 2$**.** (Для произвольного n доказательство в принципе такое же). Поскольку размерность линейного пространства есть количеству элементов любого его базиса, нам надо в S_0 построить базис, т.е. совокупность двух линейно независимых частных решений из S_0, через которые можно выразить любое другое решение из S_0.

По теореме Коши, задача Коши для ОЛДУ $a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2 y = 0$ с любыми начальными условиями $y(x_0) = y_0, \ y(x_0) = y_1$ имеет на интервале $(\alpha; \beta)$ решение, причем, единственное.

Пусть $y = \varphi_1(x)$ – решение этой задачи Коши с начальными условиями $y(x_0) = 1, \ y'(x_0) = 0$, а $y = \varphi_2(x)$ – решение этой задачи Коши с начальными условиями $y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 1$. Вронскиан этих частных решений в точке x_0 равен

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Поэтому функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы. Пусть теперь $y(x) \in S_0$ – произвольно частное решение ОЛДУ (2). Пусть $y(x_0) = \lambda_1$ и $y'(x_0) = \lambda_2$, и рассмотрим функцию $z(x) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x)$. Тогда $z(x)$ – тоже частое решение этого ОЛДУ. Вычислим $z(x_0) = \lambda_1 \varphi_1(x_0) + \lambda_2 \varphi_2(x_0) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = \lambda_1$,

$$z'(x) = \lambda_1 \varphi_1'(x) + \lambda_2 \varphi_2'(x) \Rightarrow z'(x_0) = \lambda_1 \varphi_1'(x_0) + \lambda_2 \varphi_2'(x_0) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = \lambda_2$$

Мы получили два решения одной и той же задачи Коши с одинаковыми начальными условиями: $y(x)$ и $z(x)$. Но по теореме о единственности решения задачи Коши, эти два решения должны быть тождественно равны: $y(x) \equiv z(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)$.

Итак, мы докали, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – две линейно независимые функции из S_0, через которые выражается любая другая функция из S_0, т.е. $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ – базис в пространстве S_0, и, следовательно, $\dim S_0 = 2$. ■

Определение 18. ***Фундаментальной системой решений*** для однородного линейного ДУ n-го порядка называется базис в пространстве S_0 его решений, т.е. такая совокупность линейно независимых частных решений $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ этого ОЛДУ, через которые выражается (в виде линейной комбинации) любое частное решение этого ОЛДУ).

Следовательно, каждой частное решение $y(x)$ однородного ЛДУ n-го (6) порядка можно представить в виде

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x)$$

для некоторых постоянных $C_1, ..., C_n$, (причем, единственным образом).

И наоборот, для любых постоянных $C_1, ..., C_n \in \mathbf{R}$ Функция $y(x) = C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x)$ является частным решение данного ОЛДУ. Следовательно, множество всех частных решений, т.е. общее решение однородного линейного ДУ n-го порядка (6) описывается формулой

$$y_{00} = C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x),$$ где $C_1, ..., C_n$ – произвольные константы.

Итак, мы получили:

Следствие 19 (структура общего решения ОЛДУ). *Общее решение ОЛДУ n-го порядка с непрерывными коэффициентами имеет вид*

$$y_{oo} = C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x),$$

где $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ *– линейно независимые частные решения ОЛДУ (6), они образуют базис в пространстве решений, называемый также* ***фундаментальной системой решений (ФСР)*** *этого ОЛДУ,* $C_1, ..., C_n$ *– произвольные константы.*

В частности, общее решение ОЛДУ (2) второго порядка с непрерывными коэффициентами имеет вид

$$y_{oo} = C_1 \cdot \varphi_1(x) + C_2 \cdot \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *– ФСР, т.е. линейно независимые (т.е. не пропорциональные) частные решения ОЛДУ (2)*

2. Формула Остроградского – Лиувилля

Теорема 20 (дифференциальное уравнение для вронскиана частных решений ОЛДУ). *Если функции* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *являются частными решениями ОЛДУ n-го порядка*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (6)$$

то их вронскиан

$$W(x) = W_{[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]}$$

удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$a_0(x) \cdot W' + a_1(x) \cdot W = 0. \qquad \mathbf{(7)}$$

Доказательство (для $n = 2$). **Пусть** $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два частных решение ОЛДУ

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

Это значит, что

$$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0 \qquad (8)$$

$$a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 = 0 \qquad (9)$$

Пусть $W(x) = W_{[y_1(x),\, y_2(x)]} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$, тогда

$$\frac{dW}{dx} = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2' - y_1y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2''.$$

Умножим равенства (8) и (9) на $y_2(x)$ и $y_1(x)$ соответственно, а затем вычтем из нижнего равенства верхнее. Получим, после упрощения:

$$a_0(x)\left(y_1y_2'' - y_1''y_2''\right) + a_1(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0, \text{ т.е.}$$

$$a_0(x)\cdot W' + a_1(x)\cdot W = 0$$

Следствие 21 (формула Остроградского-Лиувилля): *Вронскиан любых n частных решений* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *ОЛДУ (6) (в частности, вронскиан любых двух частных решений* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *ОЛДУ второго порядка(2), равен*

$$W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}, \qquad (10)$$

где либо $C = 0$*, если эти решения линейно зависимы, либо* $C \neq 0$*, если они независимы.*

Пример 22. Найти вронскиан двух частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ОЛДУ

$$y''\sin x + y'\cos x + x^2y = 0$$

(не находя сами эти решения).

Решение. По формуле (10), $W(x) = Ce^{-\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = Ce^{-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|} = \dfrac{C}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = C\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ (знак модуля можно опустить из за произвольной константы *C*). ■

Упражнение 23. Найти вронскиан двух частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ОЛДУ

$$x\,y'' + 3y' + y\cos x = 0$$

(не находя сами эти решения).

Ответ: $W(x) = \dfrac{C}{x^3}$.

Следствие 24. *Если на промежутке* $(\alpha;\beta)$ *все коэффициенты ОЛДУ 2-го порядка* $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ *непрерывны и* $a_0(x) \neq 0$*, то вронскиан любых его двух частных решений, либо тождественно равен нулю, если эти решения линейно зависимы на* $(a;b)$*, либо отличен от нуля во всех точках* $(a;b)$*, если эти решения линейно независимы.*

Следствие 25. *Если известно одно частное решение* $\varphi_1(x)$ *данного ОЛДУ второго порядка* $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$*, то другое частное решение* $\varphi_2(x)$*, линейно независимое от* $\varphi_1(x)$*, можно найти по формуле*

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\int \frac{W(x)}{(\varphi_1(x))^2}dx = C\int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}}{(\varphi_1(x))^2}dx, \text{ где } C \neq 0.$$

(В качестве применения см. ниже вывод нахождения ФСР для однородного линейного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $ay'' + by' + cy = 0$ в случае, когда корни характеристического уравнения действительны и равны, т.е. когда $D = b^2 - 4ac = 0$).

3. Решение ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ОЛДУ:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,, \qquad (11)$$

где $a_i = const \in \mathbf{R},\ a_0 \neq 0$.

Многочлен

$$P(\lambda) \underset{def}{=} a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \qquad (12)$$

называется ***характеристическим*** для ОЛДУ (11). Алгебраическое уравнение $P(\lambda) = 0$ также называется характеристическим. В частности, для ОЛДУ второго порядка

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (13)$$

Характеристическое уравнение имеет вид $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Теорема 26. *Пусть λ – вещественное или комплексное число. Тогда функция $y = e^{\lambda x}$ является решением ОЛДУ (11) тогда и только тогда λ является корнем соответствующего характеристического многочлена.*

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем ОЛДУ 2-го порядка (13) Тогда, если $y = e^{\lambda x}$, то $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, Подставим их в (13) получим

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0\,,$$

откуда, после сокращения на $e^{\lambda x} > 0$, получаем

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,.$$

– характеристическое уравнение ■

Теорема 27. *Пусть дано ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$ay'' + by' + cy = 0,\ (a \neq 0)\,, \qquad (13)$$

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ *– соответствующее характеристическое уравнение, имеющее вещественные или комплексные корни λ_1, λ_2. Тогда общее решения ОЛДУ (13) имеет следующий вид (в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$):*

(а) если $D > 0$ и λ_1, λ_2 – различные вещественные корни, то

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

(б) если $D = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \in \mathbf{R}$, то

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x};$$

(в) если $D < 0$ и корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные, причем, $\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}^+$, i – мнимая единица ($i^2 = -1$), то

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 x e^{\alpha x} \sin \beta x\,.$$

Доказательство. Согласно следствию из теоремы 4, общее решение ОЛДУ (6) имеет вид $y_{\text{оо}} = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$, где $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ – какие-то два частных линейно независимых решения ОЛДУ (13).

(а) По теореме 26, функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ являются решениями ОЛДУ (6), и они независимы, т.к. не пропорциональны, их отношение $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const$, т.к. $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Следовательно, эти две функции образуют базис в пространстве решений ОЛДУ (13).

(б) В нашем случае, $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ и $y_1 = e^{\alpha x}$ – частное решение ОЛДУ (13). Найдем другое частное решение $y_2(x)$ этого уравнения, независимое от $y_1(x)$, с помощью следствия из формулы Остроградского – Лиувилля (константу *С* возьмем, например, равной 1):

$\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b}{a} dx} = \dfrac{C}{\left(e^{\alpha x}\right)^2} e^{2\alpha x} = 1 \Rightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = x \Rightarrow y_2 = xy_1 = xe^{\alpha x}$. Следовательно, функции $y_1 = e^{\alpha x}$ и $y_2 = xe^{\alpha x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (13).

(в) Сначала приведем важную формулу из теории комплексных чисел, называемую ***формулой Эйлера***:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (14)$$

Например, $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пусть теперь, характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Тогда, согласно теореме 5, функции $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x)$ и $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x - i\sin\beta x)$ являются комплексными частными решениями ОЛДУ (13). Но тогда, по теореме 3, их линейные комбинации $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(y_1(x) + y_2(x)) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ и $\varphi_2(x) = \frac{1}{2i}(y_1(x) - y_2(x)) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$ также являются частными решениями ОЛДУ (6). Эти решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ вещественны и линейно независимы, поскольку их отношение непостоянно: $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \dfrac{e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x}{e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x} = \operatorname{ctg}\beta x \neq const$.

Следовательно, эти две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения (13). **Теорема доказана.**

Правило 28. Укажем без доказательства, как строить фундаментальную систему решений для ОЛДУ с постоянными коэффициентами произвольного n-го порядка.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (15)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – все корни (вещественные и/или комплексные) характеристического уравнения (5), а натуральные числа $r_1, r_2, \ldots, r_k$ – соответствующие кратности этих корней. Это значит, что характеристический многочлен разлагается в произведение

$$P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

и общее количество корней с учетом их кратностей равно порядку n ОЛДУ, т.е. $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$.

Заметим также, что все коэффициенты характеристического уравнения вещественны, и поэтому его комплексные корни попарно комплексно сопряжены, т.е. если имеется корень $\lambda = \alpha + i\beta$ кратности r, то имеется и корень $\lambda = \alpha - i\beta$ той же кратности r.

(1°) Каждому вещественному корню $\lambda_j = \gamma \in \mathbf{R}$ кратности r соответствуют ровно r различных функций, составляющих ФСР уравнения (4):

$$\varphi_1(x) = e^{\gamma x}, \varphi_2(x) = x \cdot e^{\gamma x}, \ldots, \varphi_r(x) = x^{r-1} \cdot e^{\gamma x}$$

(2°) Каждой паре комплексно сопряженных корней $\lambda_j = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}^+$, каждый из которых имеет кратность r, соответствуют r пар функций, составляющих ФСР уравнения (4) (а всего их $2r$):

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \varphi_2(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \ldots, \varphi_r(x) = x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x;$$

$$\psi_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \psi_2(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \ldots, \psi_r(x) = x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x.$$

Полная фундаментальная система решений ОЛДУ (4) состоит из всех функций, построенных таким образом для всех корней характеристического уравнения.

Пример 29. Найти общие решения следующих ОЛДУ:

(а) $y''' - 8y = 0$; (б) $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$; (в) $y^{(7)} - 16y^{(3)} = 0$.

Решение. Запишем для каждого ОЛДУ характеристический многочлен $P(\lambda)$ и разложим его на множители:

(а) $P(\lambda) = \lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$, корни $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, их кратности равны 1. Поэтому $y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right) + C_2 e^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$;

(б) $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda+1)^2(\lambda - 3) = 0$, корни и их кратности: $\lambda_1 = -1, r_1 = 2$, $\lambda_2 = 3, r_2 = 1$, поэтому $y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{3x}$.

(в) $P(\lambda) = \lambda^7 - 16\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^4 - 16) = \lambda^3(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4)$, корни и их кратности: $\lambda_1 = 0, r_1 = 3; \lambda_2 = 2, r_2 = 1, \lambda_3 = -2, r_3 = 1,\ \lambda_{4,5} = 0 \pm 2i$, $r_{4,5} = 1$, общее решение

$$\begin{aligned} y_{\text{оо}} &= C_1 e^{0x} + C_1 x \cdot e^{0x} + C_1 x^2 \cdot e^{0x} + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x} + C_6 e^{0x}\cos 2x + C_7 e^{0x}\sin 2x = \\ &= C_1 + C_1 x + C_1 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x} + C_6 \cos 2x + C_7 \sin 2x. \end{aligned}$$

4. Решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений.

Докажем две общие теоремы о неоднородных линейных дифференциальных уравнениях.

Теорема 30 (структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения). *Общее решение НЛДУ (1) есть сумма частного решения этого НЛДУ и общего решения соответствующего ОЛДУ (2):*

$$y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}.$$

Доказательство. Пусть $S_{\text{н}}$ – множество всех частных решений НЛДУ (1), S_o – множество всех частных решений ОЛДУ(3), $y_{\text{чн}}(x) = y_1(x)$ – какое-то частное решение ОЛДУ (1), т.е. $\mathcal{L}[y_1(x)] = f(x)$. Нам надо доказать совпадение множества $S_{\text{н}}$ с множеством $\{y_1 + S_o\} \underset{def}{=} \{y_1(x) + z(x) \mid z(x) \in S_o\}$.

Пусть $y(x) \in S_{\text{н}}$, это значит, что $\mathcal{L}[y] = f(x)$. Рассмотрим $z(x) = y(x) - y_1(x)$. Тогда $\mathcal{L}[z(x)] = \mathcal{L}[y(x) - y_1(x)] = \mathcal{L}[y(x)] - \mathcal{L}[y_1(x)] = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow z(x) \in S_o$ $\Rightarrow y(x) = y_1(x) + z(x) \Rightarrow y(x) \in \{y_1 + S_o\}$.

Обратно, пусть $y(x) \in \{y_1 + S_o\}$. Тогда $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x) \in S_o$, т.е. $\mathcal{L}[z(x)] = 0$. Тогда $\mathcal{L}[y(x)] = \mathcal{L}[y_1(x) + z(x)] = \mathcal{L}[y_1(x)] + \mathcal{L}[z(x)] = f(x) + 0 = f(x)$, но это и значит, что $y(x) \in S_{\text{н}}$. **Теорема доказана**.

Теорема 31 (теорема о наложении частных решений НЛДУ). *Пусть правая часть $f(x)$ НЛДУ (1) является линейной комбинацией других функций $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)$, а для каждого $k = 1, \ldots, m$ функция $y_k(x)$ является частным решением ОЛДУ $\mathcal{L}[y] = f_k(x)$. Тогда функция $y_o(x) = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_m y_m(x)$ является частным решением уравнения (1).*

Доказательство. По условию, $\mathcal{L}[y_k(x)] = f_k(x)$ для каждого $k = 1, \ldots, m$. Поэтому $\mathcal{L}[y_o] = \mathcal{L}[\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_1 y_1] = \alpha_1 \mathcal{L}[y_1] + \ldots + \alpha_m \mathcal{L}[y_m] = \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x) = f(x)$.

Это и значит, что функция $y_o(x)$ является частным решением уравнения (1). **Теорема доказана**.

---

5. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Этот метод позволяет находить общее решение любого НЛДУ, если известна фундаментальная система решений соответствующего ОЛДУ. Сначала рассмотрим подробно ЛДУ второго порядка.

Теорема 32. *Пусть для однородного ЛДУ второго порядка*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (2)$$

нам известно его общее решение:

$$y_{\text{оо}} = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

Тогда для неоднородного ЛДУ

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (1)$$

общее решение можно найти в виде

$$y_{\text{он}} = C_1(x)\cdot\varphi_1(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2(x), \qquad (16)$$

где производные $C_1'(x)$ *и* $C_2'(x)$ *являются решениями системы двух линейных уравнений с расширенной матрицей:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & 0 \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & f_0(x) \end{array}\right), \text{ где } f_0(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Эта система всегда имеет единственное решение на любом промежутке, где непрерывны все коэффициенты ОЛДУ (8) и $a_0(x) \neq 0$.

Доказательство. Чтобы найти **две** неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, необходимо **два** условия (уравнения), у нас же только **одно** дифференциальное уравнение (1). Следовательно, надо добавить **еще одно** условие.

Найдем первую производную функции (16):

$$y'(x) = C_1'(x)\cdot\varphi_1(x) + C_1(x)\cdot\varphi_1'(x) + C_2'(x)\cdot\varphi_2(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2'(x) =$$

$$= \Big(C_1'(x)\cdot\varphi_1(x) + C_2'(x)\cdot\varphi_2(x)\Big) + C_1(x)\cdot\varphi_1'(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2'(x),$$

и в качестве второго условия потребуем, чтобы выражение в первой большой скобке равнялось нулю:

$$C_1'(x)\cdot\varphi_1(x) + C_2'(x)\cdot\varphi_2(x) = 0. \qquad (17)$$

Тогда

$$y' = C_1(x)\cdot\varphi_1'(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2'(x), \qquad (18)$$

найдем теперь вторую производную:

$$y'' = \Big(C_1(x)\cdot\varphi_1'(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2'(x)\Big)' =$$

$$= C_1'(x)\cdot\varphi_1'(x) + C_1(x)\cdot\varphi_1''(x) + C_2'(x)\cdot\varphi_2'(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2''(x) \Rightarrow$$

$$y'' = C_1'(x)\cdot\varphi_1'(x) + C_2'(x)\cdot\varphi_2'(x) + C_1(x)\cdot\varphi_1''(x) + C_2(x)\cdot\varphi_2''(x) \qquad (19)$$

Заметим, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются частными решениями ОЛДУ (2), и поэтому верны равенства $a_0(x)\cdot\varphi_i''(x) + a_1(x)\cdot\varphi_i'(x) + a_2(x)\cdot\varphi_i(x) = 0$ для $i = 1, 2$. Подставим выражения искомого решения (16) и его производных (18) и (19) в уравнение (1), подучим

$$a_0(x)\left(C_1'(x)\cdot\varphi_1'(x)+C_2'(x)\cdot\varphi_2'(x)+C_1(x)\cdot\varphi_1''(x)+C_2(x)\cdot\varphi_2''(x)\right)+$$
$$+a_1(x)\left(C_1(x)\cdot\varphi_1'(x)+C_2(x)\cdot\varphi_2'(x)\right)+$$
$$+a_2(x)\left(C_1(x)\cdot\varphi_1(x)+C_2(x)\cdot\varphi_2(x)\right)=f(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$C_1(x)\left[a_0(x)\cdot\varphi_1''(x)+a_1(x)\cdot\varphi_1'(x)+a_2(x)\cdot\varphi_1(x)\right]+$$
$$+C_1(x)\left[a_0(x)\cdot\varphi_2''(x)+a_1(x)\cdot\varphi_2'(x)+a_2(x)\cdot\varphi_2(x)\right]+$$
$$+a_0(x)\left(C_1'(x)\cdot\varphi_1'(x)+C_2'(x)\cdot\varphi_2'(x)\right)=f(x)$$

Выражения в квадратных скобках, как мы заметили ранее, равны нулю, следовательно последнее уравнение упрощается так:

$$a_0(x)\left(C_1'(x)\cdot\varphi_1'(x)+C_2'(x)\cdot\varphi_2'(x)\right)=f(x)\Leftrightarrow C_1'(x)\cdot\varphi_1'(x)+C_2'(x)\cdot\varphi_2'(x)=\frac{f(x)}{a_0(x)} \qquad (20)$$

Условия (17) и (20) образуют систему линейных уравнений :

$$\begin{cases}\varphi_1(x)\cdot C_1'(x)+\varphi_2(x)\cdot C_2'(x)=0\\ \varphi_1'(x)\cdot C_1'(x)+\varphi_2'(x)\cdot C_2'(x)=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}\end{cases} \qquad (21)$$

Главный определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}=W_{[\varphi_1,\varphi_2]}$$

есть вронскиан системы линейно независимых частных решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ОЛДУ (1), поэтому он отличен от нуля, и система (16) всегда имеет единственное решение. **Теорема доказана.**

Пример 33. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$4y''+y=\frac{8}{1+\cos x}. \qquad (22)$$

Решение. Напишем соответствующее однородное ЛДУ: $4y''+y=0$, составим для него характеристическое уравнение $4\lambda^2+1=0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{2}i$. Общее решение для ОЛДУ имеет вид $y_{\text{оо}}=C_1\cos\dfrac{x}{2}+C_2\sin\dfrac{x}{2}$. Общее решение данного уравнения (22) будем искать в виде

$$y_{\text{он}}=C_1(x)\cos\frac{x}{2}+C_2(x)\sin\frac{x}{2}. \qquad (23)$$

В данном случае $\varphi_1(x)=\cos\dfrac{x}{2}, \varphi_2(x)=\sin\dfrac{x}{2}$.Производные функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ удовлетворяют системе линейных уравнений с расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{cc|c}\cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} & 0\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & \frac{2}{1+\cos x}\end{array}\right)$$

Решим эту систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2}\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{x}{2}=\tfrac{1}{2},\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin\frac{x}{2}\\ \dfrac{2}{1+\cos x} & \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\end{vmatrix}=-\frac{2\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x}=-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos\frac{x}{2} & 0\\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} & \dfrac{2}{1+\cos x}\end{vmatrix}=\frac{2\cos\frac{x}{2}}{1+\cos x}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Следовательно, $C_1'(x)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $C_2'(x)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{2}{\cos\frac{x}{2}}$.

Теперь, интегрируя, находим:

$$C_1(x)=\int\frac{2\sin\frac{x}{2}\,dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{4}{\cos\frac{x}{2}}+\overline{C}_1,\quad C_2(x)=\int\frac{2\,dx}{\cos\frac{x}{2}}=4\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|+\overline{C}_2\,, \tag{24}$$

где $\overline{C}_1, \overline{C}_2=const$. Подставляя полученные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ (24) в (23) получим искомое общее решение неоднородного ЛДУ (22):

$$y_{\text{он}}=\left(\frac{4}{\cos\frac{x}{2}}+\overline{C}_1\right)\cos\frac{x}{2}+\left(4\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|+\overline{C}_2\right)\sin\frac{x}{2}=$$

$$=\underbrace{\left(4+4\sin\frac{x}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|\right)}_{y_{\text{чн}}-\text{частное реш. неодн. ЛДУ}}+\underbrace{\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)}_{\substack{y_{\text{оо}}-\text{ общее реш.}\\ \text{соотв. однор. ЛДУ}}}$$

(черту над настоящими константами уже можно опустить).

Метод Лагранжа вариации постоянной для ОЛДУ первого порядка.
Рассмотрим линейное неоднородное ДУ первого порядка:

$$a_0(x)y'+a_1(x)y=f(x)\,, \tag{25}$$

(1°) Сначала напомним «старый» **метод Бернулли**. Запишем это уравнение в виде:

$$y'=A(x)y+B(x)\,, \tag{26}$$

где $A(x)=-\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $B(x)=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}$.

Его решение ищем в виде произведения двух неизвестных функций:

$$y=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow y'=u'v+uv'.$$

Нам опять не хватает одного условия. Подставим это в ДУ (25):

$$(u'v+uv')=A(x)uv+B(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u\cdot v'+v\cdot\left[u'-A(x)u\right]=B(x)$$

В качестве второго условия приравняем нулю выражение в квадратных скобках, получим систему:

$$\begin{cases} u'=A(x)\cdot u,\\ u\cdot v'=B(x).\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $\displaystyle\int\frac{du}{u}=\int A(x)dx\Rightarrow u(x)=e^{\int A(x)dx}$, а из второго –

$$v(x)=\int\frac{B(x)}{u(x)}dx+C\,.$$

(2°) Теперь решим это же уравнение

$$a_0(x)y'+a_1(x)y=f(x) \tag{25}$$

методом вариации постоянных. Сначала решим соответствующее однородное ЛДУ:

$$a_0(x)y'+a_1(x)y=0 \tag{27}$$

путем разделения переменных:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\Rightarrow y_{\text{оо}}=C\cdot\varphi(x)\,,\text{ где }\varphi(x)=e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Общее решение неоднородного ЛДУ (20) будем искать в виде $y_{\text{он}}=y(x)=C(x)\cdot\varphi(x)$. Находим: $y'=C'(x)\cdot\varphi(x)+C(x)\cdot\varphi'(x)$ и подставляем в (25):

$$a_0(x)\big(C'(x)\cdot\varphi(x)+C(x)\cdot\varphi'(x)\big)+a_1(x)\cdot C(x)\cdot\varphi(x)=f(x)\Leftrightarrow$$
$$C(x)\cdot\{a_0(x)\varphi'(x)+a_1(x)\varphi(x)\}+C'(x)\cdot a_0(x)\cdot\varphi(x)=f(x)$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю, т.к. $\varphi(x)$ – решение однородного ЛДУ (27).

Следовательно, $C'(x)\cdot a_0(x)\cdot\varphi(x)=f(x)$, откуда $C(x)=\int\frac{f(x)\,dx}{a_0(x)\cdot\varphi(x)}+\overline{C}$.

Мы видим, что эти два способа решения отличаются только обозначениями, а именно, $A(x)=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$, $B(x)=\frac{f(x)}{a_0(x)}$ $u(x)=\varphi(x)$, $v(x)=C(x)$.

В заключение без доказательства приведем теорему.

Теорема 34. **(метод вариации постоянных для НЛДУ *n*-го порядка).** *Пусть для однородного ЛДУ n-го порядка*

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (28)$$

нам известно его общее решение:

$$y_{\text{оо}}=C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x).$$

Тогда для неоднородного ЛДУ

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (29)$$

общее решение можно найти в виде

$$y_{\text{он}}=C_1(x)\cdot\varphi_1(x)+\ldots+C_n(x)\cdot\varphi_n(x),$$

где производные $C_1'(x),\ldots,\ C_n'(x)$ являются решениями системы n линейных уравнений с расширенной матрицей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) & 0\\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) & f_0(x)\end{array}\right),\ \text{где}\ f_0(x)=\frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Эта система всегда имеет единственное решение на любом промежутке, где непрерывны все коэффициенты ОЛДУ (29) и $a_0(x)\neq 0$.

- -

6. Метод неопределенных коэффициентов решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Мы умеем строить общее решение $y_{\text{оо}}(x)$ однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

Для этого надо составить характеристического уравнения

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0,$$

найти его корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ и определить их кратности $r_1,r_2,\ldots,r_k$ (натуральные числа, т.е. целые положительные).

Условимся считать, что если вещественное или комплексное число λ **не является** корнем данного характеристического уравнения, то мы все равно будем считать его **корнем кратности ноль**.

Для нахождения общего решения $y_{\text{он}}(x)$ неоднородного ЛДУ

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

надо знать его какое-нибудь частное решение $y_{\text{чн}}(x)$, поскольку $y_{\text{он}}=y_{\text{чн}}+y_{\text{оо}}$.

Такое частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов в том случае, **если функция $f(x)$ имеет специальный вид первого или второго типа.**

Правило 35. Специальный вид правой части 1-го типа: $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$, где $\alpha\in\mathbf{R}$, $P_m(x)$ – многочлен степени *m*.

Пусть число α является корнем кратности *r* характеристического уравнения. В этом случае частное решение можно найти в виде:

$$y_{\text{чн}}=x^r e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x),$$

где $\tilde{P}(x)$ – многочлен степени *m* с неопределенными коэффициентами. Напомним, что многочлены степени 0, 1 и 2 с неопределенными коэффициентами имеют вид $A,\ Ax+B,\ Ax^2+Bx+D$ соответственно ($A, B, D, \ldots$ – неопределенные коэффициенты, которые надо найти).

Чтобы найти эти коэффициенты, следует:

(1) найти первую, вторую и т.д. производные функции $y_{\text{чн}}=x^r e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x)$;

(2) подставить их в данное НЛДУ $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=e^{\alpha x}P(x)$, привести подобные и сократить левую и правую части на $e^{\alpha x}$;

(3) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной x слева и справа; получится система линейных уравнений (число этих уравнений будет равно $(m+1)$ – числу искомых неопределенных коэффициентов);

(4) Решить полученную систему уравнений.

Правило 36. Специальный вид правой части 2-го типа:
$f(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_k(x)\sin\beta x\right)$, где $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}^+$, $P_m(x)$ **и** $Q_k(x)$ – многочлены степени *m* и k соответственно (один из этих многочленов может вовсе отсутствовать, т.е. быть нулевым). Нулевой многочлен будем считать имеющим степень минус один.

Пусть комплексные числа $\lambda=\alpha\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности r и $N=\max\{m,k\}$. В этом случае частное решение можно найти в виде :

$$y_{\text{чн}}=x^r\cdot e^{\alpha x}\cdot\left(\tilde{P}_N(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_N(x)\sin\beta x\right).$$

Чтобы найти коэффициенты многочленов $\tilde{P}_N(x)$ и $\tilde{Q}_N(x)$, надо:

(1) найти первую, вторую и т.д. производные функции $y_{\text{чн}}=x^r e^{\alpha x}\tilde{P}_m(x)$;

(2) подставить их в данное НЛДУ
$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=e^{\alpha x}\cdot\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_k(x)\sin\beta x\right)$, привести подобные и сократить левую и правую части на $e^{\alpha x}$;

(3) Представить левую часть в виде в виде $A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях *x* слева и справа в многочленах при $\cos\beta x$ (т.е. в $A(x)$ и $P_m(x)$), а затем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях *x* слева и справа в многочленах при $\sin\beta x$, т.е. при $B(x)$ и $Q_k(x)$); получится система из $2(N+1)$ линейных уравнений;

(4) Решить полученную систему уравнений.

Замечание. 37 Часто правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но является суммой нескольких функций $f(x)=f_1(x)+\ldots+f_s(x)$, где каждая из функций $f_i(x)$ имеет специальный вид 1-го или 2-го типа. В этом случае, по теореме 8, частное решение имеет вид $y_{\text{чн}}=y_1(x)+\ldots+y_s(x)$, где $y_i(x)$ – частное решение для НЛДУ

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f_i(x).$$

Пример 38. Найти общее решение НЛДУ $y''-2y'-3y=(4x+8)e^{-x}+13\sin 2x.$

Решение. Для соответствующего однородного ЛДУ $y''-2y'-3y=0$ характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda-3=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$ и $\lambda_2=3$ кратности $r=1$ каждый. Общее решение ОЛДУ есть $y_{оо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. Правая часть есть сумма двух функций $f(x) = (x+2)e^{-x} + 13\sin 2x = f_1(x) + f_2(x)$, имеющих специальный вид 1-го и 2-го типа соответственно. Частное решение есть сумма: $y_{чн} = y_1(x) + y_2(x)$, где

$y_1(x)$ – частное решение НЛДУ $y'' - 2y' - 3y = f_1(x) = (4x+8)e^{-x}$, (30)

$y_2(x)$ – частное решение НЛДУ $y'' - 2y' - 3y = f_2(x) = 13\sin 2x$. (31)

(1) $f_1(x) = e^{\alpha x} P_m(x) = e^{-x}(x+2)$**,** $\alpha = -1$ **–** корень кратности 1, $m = 1$, следовательно $y_1(x) = x^1 e^{-x} \tilde{P}_1(x) = xe^{-x}(Ax+B) = e^{-x}(Ax^2 + Bx)$.

Находим первую и вторую производные:

$$y_1' = -e^{-x}(Ax^2 + Bx) + e^{-x}(2Ax+B) = e^{-x}(-Ax^2 + (2A-B)x + B),$$

$$y_2'' = -e^{-x}(-Ax^2 + (2A-B)x + B) + e^{-x}(-2Ax + 2A - B) =$$
$$= e^{-x}\left(Ax^2 + (B-4A)x + (2A-2B)\right)$$

и подставим в уравнение (30), получим:

$$e^{-x}\left(Ax^2 + (B-4A)x + (2A-2B)\right) - 2e^{-x}\left(-Ax^2 + (2A-B)x + B\right) - 3e^{-x}(Ax^2 + Bx) = (4x+8)e^{-x}$$

Сократим на e^{-x}, приведем слева подобные:

$0x^2 - 8Ax + (2A-4B) = x + 2$ и приравняем коэффициенты при x^1 и x^0 слева и справа, получим систему: $\begin{cases} -8A = 4 \\ 2A - 4B = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2, \\ B = -9/4. \end{cases}$

Итак, $y_1(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}\right)e^{-x}$.

(2) $f_2(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right) = 3\sin 2x$, $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \lambda = 0 \pm 2i$ – корень кратности $r = 0$, $P_m(x) = 0, Q_k(x) = 3$, $m = -1, k = 0 \Rightarrow N = 0$, поэтому

$$y_2(x) = x^0 e^{0x}\left(\tilde{P}_0(x)\cos 2x + \tilde{Q}_0(x)\sin 2x\right) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Находим первую и вторую производные:

$$y_2' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$
$$y_2'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставим в уравнение (31), получим:

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) - 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) - 3(A\cos 2x + B\sin 2x) = 13\sin 2x.$$

приравняем слева и справа коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, получим систему уравнений:

$\begin{cases} -7A - 4B = 0 \\ 4A - 7B = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = -\frac{7}{5} \end{cases}$, поэтому $y_2(x) = \frac{4}{5}\cos 2x - \frac{7}{5}\sin 2x$.

Окончательно получаем:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = y_{оо} + y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}\right)e^{-x} + \frac{4}{5}\cos 2x - \frac{7}{5}\sin 2x$$